644. D'Amore B., Arrigo G., Bonilla Estévez M., Fandiño Pinilla M.I., Piatti A., Rodríguez Bejarano J., Rojas Garzón P.J., Romero Cruz J.H., Sbaragli S. (2006). El "sentido del infinito". *Epsilon*. [Sevilla, Spagna]. Vol. 22(2), n° 65, 187-216. ISSN: 1131-9321.

El "sentido del infinito"[1] [2]

Bruno D'Amore[3] - Gianfranco Arrigo[4] - Martha Bonilla Estévez[5] - Martha Isabel Fandiño Pinilla[3] - Alberto Piatti[6] - Jorge Rodríguez Bejarano[5] – Pedro Javier Rojas Garzón[5] - Jaime Humberto Romero Cruz[5] - Silvia Sbaragli[7]

NRD Bologna - ASP Locarno – MESCUD Bogotá

Sunto. Si intende per "stima" «il risultato di un procedimento (conscio o inconscio) che tende a individuare il *valore incognito* di una quantità o di una grandezza» (Pellegrino, 1999). Che cosa accade se tale *valore incognito* è infinito? Esiste un "senso dell'infinito", così come esiste un "senso del numero"? Se sì, come si configura? Se no, perché? Si riesce a dare un senso intuitivo alla differenza tra l'infinito numerabile e l'infinito continuo? In questa ricerca si danno risposte a queste e ad altre domande, analizzando i comportamenti di soggetti di vario genere, da adolescenti ad adulti, da matematici esperti a persone di cultura, ma non nello specifico matematico. La ricerca, effettuata in Colombia, Italia e Svizzera, offre un vasto panorama ma poche differenze di rilievo tra Paese e Paese.

Resumen. Entendemos por "estimación" «el resultado de un proceso (consciente o inconsciente) que tiende a determinar el *valor desconocido* de una cantidad o de una magnitud» (Pellegrino, 1999) ¿Qué sucede si tal *valor desconocido* es infinito? ¿Existe un "sentido del infinito", así como existe un "sentido del número"? Si existe, ¿cómo se configura? Si no existe, ¿por qué? ¿Se logra dar un sentido intuitivo a la diferencia entre el infinito numerable y el continuo? En esta investigación se dan respuestas a estas y a otras preguntas, analizando el comportamiento de diversos sujetos, desde adolescentes hasta adultos, desde matemáticos expertos hasta personas de cultura no específica en matemática. La investigación, efectuada en Colombia, Italia y Suiza, ofrece un vasto panorama con pocas diferencias relevantes entre los diferentes países.

Sommaire. Par le mot "estimation" on entend «le résultat d'un procédé (conscient ou inconscient) qui a pour but de déterminer la *valeur inconnue* d'une quantité ou d'une grandeur» (Pellegrino, 1999). Qu'est-ce qui se passe si cette *valeur inconnue* est infinie? Est-ce qu'il existe un "sens de l'infini", pareillement au "sens du nombre"? Si oui, comment se forme-t-il? Si non, pourquoi? Est-ce qu'on réussit à donner un sens intuitif à la différence entre l'infini dénombrable et l'infini continu? Dans cette recherche on donne des réponses à ces questions et à d'autres, en analysant les comportements de différents sujets,

[1] Trabajo desarrollado en colaboración entre:
NRD (Núcleo de Investigación en Didáctica de la Matemática, Departamento de Matemática, Universidad de Bologna, Italia),
ASP (Alta Escuela Pedagógica, Locarno, Cantón Ticino, Suiza),
MESCUD (Matemáticas Escolares de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia).
[2] Trabajo desarrollado en el ámbito del Programa de Investigación de la Universidad de Bologna: «*Aspectos metodológicos (teóricos y empíricos) de la formación inicial y en servicio de los maestros de matemáticas de todo nivel escolar*» (años 2005-06).
[3] Italia: NRD, ASP, MESCUD.
[4] Suiza: NRD, ASP.
[5] Colombia: NRD, MESCUD.
[6] Suiza: ASP.
[7] Italia: NRD, ASP.

adolescents et adultes, mathématiciens experts et personnes de culture non-mathématique. La recherche, qui a été effectuée en Colombie, en Italie et en Suisse, montre un cadre assez vaste, mais peu de différences entre les Pays intéressés.

Summary. The word "estimate" means «the result of a process (conscious or unconscious) that determines the unknown value of an amount or a quantity» (Pellegrino, 1999). What happens if this unknown value is infinite? There exits a "sense of infinity" just as there exits a "sense of number"? If the answer is positive, what shape does it assume? If the answer is negative, why? Is it possible to succeed in giving an intuitive sense of the difference between "countable infinity" and "continuous infinity"? In this research we answer these and other questions, analysing the behaviour of different kind of individuals, from adolescents to adults, from expert mathematicians to people of culture, but not in the specific sphere of mathematics. The research carried out in Colombia, Italy and Switzerland, offers a wide outline but with little prominent differences from country to country.

1. "Estimación" y "sentido numérico"

Se entiende por "estimación" «el resultado de un procedimiento (consciente o inconsciente) que tiende a determinar el valor desconocido de una cantidad o de una magnitud» (Pellegrino, 1999, p. 145); no se trata, por tanto, de "aproximar" un resultado, sino de captar la esencia del cardinal de una colección. Que esto sea "importante" y "difícil", dado que involucra diversas habilidades, es algo en lo que coinciden el autor antes citado con Hofstadter (1982) y Villani (1991).
Acerca de las habilidades necesarias, Pellegrino (1999, pp. 146-147) hace una descripción; según su parecer, un buen estimador debe:

- estar dotado de buenas capacidades mentales y matemáticas, aunque sean intuitivas y espontáneas
- saber elegir intuitivamente el mejor camino para efectuar la estimación
- saber aceptar la presencia de un error en la estimación hecha, respecto del valor exacto
- saber transformar datos numéricos abstractos o abstrusos en algo familiar o interpretable
- saber usar y coordinar entre ellas diversas estrategias de cálculo mental.

Como se ve, en esta….caracterización del "buen estimador" se mezclan factores psicológicos, metacognitivos, afectivos y competencias matemáticas (lo repetimos: incluso ingenuas).
En más de una ocasión, en el curso de investigaciones precedentes sobre aspectos relacionados con cardinales infinitos, nos encontramos de frente a alumnos que hacen "estimaciones" curiosas en las cuales mezclan números finitos e infinitos con cierta naturalidad y sin crearse problemas (Arrigo, D'Amore, 1999, 2002).
A continuación una breve reseña, para nosotros emblemática, de algunas de tales situaciones; las presentamos en secuencia cronológica, tal y como se presentaron, y las llamaremos "episodios". A partir de las posibles interpretaciones de tales *episodios* se basa nuestra investigación actual.

Episodio 1. Ambiente: II media (edad de los alumnos: 12-13 años).
Los estudiantes están discutiendo entre ellos acerca de la cantidad de puntos de un segmento dado y una alumna, sobre la base del hecho que «un punto no tiene dimensiones», sostiene que los puntos de aquel segmento son por tanto infinitos. Esta

afirmación desencadena una reacción en sus compañeros, uno de los cuales se acerca al tablero y, deslizando la tiza sobre el segmento trazado, parece calcular cuántas veces cabe la punta de la tiza entre los dos extremos. Al final, a propósito de la cantidad de puntos del segmento exclama: «Serán como 21».
Cierto, esta última afirmación está ligada a la falta de comprensión de lo que significa afirmar, a propósito del punto, que "no tiene dimensiones". Sin embargo, ¿qué es lo que impide al alumno aceptar la cardinalidad infinita de dicho conjunto? ¿Sólo una imagen concreta de los entes matemáticos? ¿Sólo la total imposibilidad de buscar una imagen del infinito (en acto)? ¿No será, *acaso,* la total imposibilidad de hacer *estimaciones* intuitivas del *infinito*?

Episodio 2. Ambiente: V primaria (edad de los alumnos: 10-11 años).
Desde los primeros años de escuela, los alumnos de esta clase se habituaron a decir que los números (sobreentendido: naturales) son infinitos. Lo repiten a su maestra como una especie de toma y dame, sabiendo que es ésta la respuesta que la maestra quiere escuchar. Durante una prueba hecha por nosotros (por tanto con personas extrañas, fuera del contrato didáctico, a lo sumo dentro de un contrato experimental), a la pregunta si existe entre los números (naturales) "el más grande de todos", se encontró un vasto coro de respuestas afirmativas. Ante la solicitud de decir cuál era dicho número, nos encontramos de frente a múltiples respuestas y discusiones, muchas de las cuales indican un valor grande, pero nunca apareció la palabra infinito. Hacemos notar a los alumnos que existe una contradicción entre las siguientes dos afirmaciones: los números son infinitos – existe un número que es el más grande de todos. La contradicción parece no ser advertida, sólo un alumno afirma: «Está bien, pero es diferente; sí lo son, son infinitos, pero después, si tu cuentas siempre, llegas a un final, allá» (e indica hacia lo alto).
Sabemos bien cuál es la influencia del contrato didáctico y cómo repetirle al maestro aquello que él está esperando no constituye conocimiento; sabemos también lo difícil que es, si no imposible, activar en el estudiante conciencia y responsabilidad cuando se le coloca frente a contradicciones explícitas, en particular en el caso del infinito (Tsamir, Tirosh, 1992; D'Amore, Martini, 1999). Y, sin embargo, ¿cómo no tener curiosidad ante esta confusión de "estimación"?. El estudiante podría ver el número de los números (naturales) como un número "grandísimo" y reservar por tanto la denominación "infinito" a aquellas cosas, que en su competencia, resulta ser más que todo "indefinido". ¿No se tratará, acaso, de una falta de capacidad para *estimar el infinito*?

Episodio 3. Ambiente: curso de actualización para maestros de escuela primaria y secundaria inferior (edad: de los 25 años a los 60 años).
Por solicitud directa de los mismos maestros, se está tratando el tema del infinito matemático en modo extremamente elemental. Se está diciendo que en el idioma hay un abuso semántico de dicha palabra, abuso que puede repercutir en forma negativa en el lenguaje matemático. Se hace notar que, respecto al infinito, cualquier número natural, sin importar lo grande que sea, es siempre muy pequeño. Con el objetivo de involucrar a los profesores de idiomas presentes, se hace referencia al *Paraíso* de Dante y al cálculo del número de ángeles que, instante por instante, nacen; se trata de un número

determinado y con esto se quiere dar una imagen del tamaño de dicho número.[8] A este punto, más de un docente afirma que, como dicho número es monstruosamente grande, es infinito. Al intentar explicar que no, que sin importar qué tan grande sea, es siempre finito, se tiene una reacción negativa casi unánime debida al hecho que "infinito", en la competencia de muchos, tiene como modelo una cantidad grande, tan grande que no se puede contar, tanto que no es posible hacer una *estimación.*

Episodio 4. Ambiente: IV media de una escuela Suiza (edad: de 14 años a 16 años).
Se pidió comparar la cardinalidad de **N** con la de **Z.** En la mayor parte de los casos, los alumnos han utilizado imágenes mentales ligadas al cálculo con los números finitos; esto ha llevado naturalmente al fenómeno de la *dependencia* (Arrigo, D'Amore, 1999, 2002), según el cual, para decirlo brevemente, la cardinalidad de un conjunto infinito depende de su extensión, sobre la base de un modelo gráfico; en este sentido, un segmento largo tiene más puntos que un segmento corto, mientras que un conjunto A, con $A \subset B$, tiene menos elemento que B. Por tanto, la mayor parte de los estudiantes han aceptado "obviamente" que: $|N| = ½ \ |Z|$. [Uno de los alumnos puntualiza: «(…) excluyendo el cero»].
En otros casos, los alumnos han utilizado efectivamente una imagen mental primitiva de infinito pero caen en el fenómeno del *aplastamiento* según el cual, dicho en pocas palabras, todos los conjuntos infinitos, en cuanto infinitos, tienen la misma cardinalidad. Estos alumnos han sostenido que $|N| = |Z|$ dado que los dos conjuntos son infinitos (Arrigo, D'Amore, 1999, 2002).
Hacemos notar que los estudiantes de toda la clase, frente a estas dos relaciones entre cardinales ($|N| = ½|Z|$ e $|N| = |Z|$), obviamente contradictorias, [9] no han querido admitir que existe algo anormal en tal incoherencia. Hubo un comentario: «Depende de cómo se razona». Este reenvío a una relatividad del "como se razona" está ligado en forma explícita con los modelos a los cuales se recurre para las dos igualdades:

- la primera se refiere al modelo gráfico conocido, el orden "natural", en el que N se "apoya" sobre una semirrecta orientada (con los números – puntos discretos) y Z en una análoga recta orientada;
- la segunda igualdad hace referencia a un orden de Z del tipo: 0 +1 -1 +2 -2 +3 -3..., gracias a la cual se establece una (bastante) obvia correspondencia biunívoca con N.

Esta actitud ha sido revelada por muchos autores de investigaciones en el campo internacional (como se mostró ampliamente en D'Amore, 1996).[10]
La pregunta de carácter nuevo que nos proponemos es: ¿más allá de las explicaciones ya dadas a esta actitud, no es posible que emerja una incapacidad de *estimar* el infinito común a los dos conjuntos **N** y **Z**? ¿No es posible pensar que el estudiante tienda a hacer estimaciones diversas sólo porque los modelos gráficos propuestos para los dos

---

[8] El cálculo del número que Dante parece presentar en Par XXVIII 91 – 93 es analizado en D'Amore (2001).
[9] Nótese bien: desde un punto de vista matemático, dado que la afirmación **n** = ½ **n** (o $\aleph_0 = ½ \aleph_0$), es en un sentido correcta, pero que requiere de una competencia matemática relevante, el nivel escolar en el que sucede el episodio 4, las dos relaciones deberían entrar en conflicto entre ellas, a menos que no se imponga el fenómeno del *aplastamiento.*
[10] D'Amore, 1996, traza un panorama internacional de las investigaciones sobre la didáctica del infinito hasta 1996; esto fue la base de la conferencia inaugural del Topic Group XIV en ocasión del octavo ICME (International Congress on Mathematical Education), en Sevilla, en el cual el autor era el Chief Organiser

conjuntos son diversos? Por tanto, la estimación estaría condicionada por factores que podemos llamar externos. Esta consideración agregaría otra “habilidad” a las ya enunciadas por Pellegrino (1999), presentadas por nosotros en **1.**:

- saber efectuar la estimación sin tener en cuenta los factores externos no significativos (el recipiente que contiene los objetos concretos por estimar, en el caso físico finito; el modelo gráfico al cual se recurre para indicar el conjunto de referencia, en el caso de conjuntos infinitos).[11]

Episodio 5. Ambiente: últimos años de la escuela superior (en Italia y Suiza) (edad de los alumnos: 17 – 19 años).

A algunos estudiantes que ya habían estudiado el argumento “infinito matemático”, se les planteó la siguiente pregunta (las preguntas explícitas que aparecen en la primera fila fueron formuladas sobre la base de declaraciones anteriores de estudiantes, obtenidas en investigaciones precedentes: Arrigo, D’Amore, 1999, 2002):

3) ¿A pesar del hecho que entre dos racionales diferentes hay infinitos racionales, crees aún que los números racionales son tantos como los naturales?

Sí estás de acuerdo				**No estás de acuerdo**		
Porque lo ha dicho el maestro, justificándolo con una demostración, pero que no me convenció		Porque los dos conjuntos son infinitos	Porque vimos una demostración clarísima y convincente	Porque es contraria al sentido común	Porque en la demostración hay algo que no me convence	Porque el conjunto de los racionales es más grande que él de los naturales
CH	1.11%	30%	27.78%	0%	1.11%	38.89%
			58.89%			40%
I	1.01%	66.67%	11.1%	3.03%	2.02%	13.13%
			78.78%			18.18%
T	**1.06%**	**49.21%**	**19.05 %**	**1.59%**	**1.59%**	**25.4%**
			69.32%			**28.58%**

El 69.32% de respuestas “positivas” no nos debe engañar: éstas se componen de más del 11% de estudiantes italianos y de más del 27% de estudiantes suizos. El fuerte aporte de los estudiantes suizos, se reveló posteriormente, sobre la base de la entrevista clínica, no tanto como el resultado de una verdadera comprensión, sino de la confianza generalizada (un poco a-crítica) que el estudiante suizo atribuye a todo aquello que el maestro afirma en el aula. Si tomamos los porcentajes de las respuestas dadas por los estudiantes italianos, tenemos un cuadro más congruente con las reales capacidades de los estudiantes de la escuela superior para confrontar cardinales de conjuntos infinitos. Aquí encontramos de nuevo el efecto de “aplastamiento”: oralmente, el 67% responde afirmativamente, los dos conjuntos son equipotentes, pero sólo porque los dos conjuntos son infinitos.

Lograr percibir la igualdad $|N| = |Q|$ como un hecho intuitivo supera toda posibilidad no sólo en los principiantes, sino también en muchos estudiantes considerados excelentes

[11] En este punto, se podría hacer referencia a los “modelos parásitos” a los cuales recurren los estudiantes, aunque si, desde el punto de vista de las expectativas del maestro, estos sean insignificantes (formas graficas, orden de las letras, ...) (D’Amore, 1998).

para la matemática. No obstante la demostración de Cantor (o análogas, de ésta derivadas), parece que la intuición no juegue a favor. El hecho es que las *estimaciones* de las cardinalidades de los dos conjuntos están fuertemente obstaculizadas por la intuición que parece inclinarse por la afirmación $|N| < |Q|$. También en este caso, las habilidades citadas al inicio del artículo, aquellas tomadas del artículo de Pellegrino (1999), se ponen en discusión...

Episodio 6. Ambiente: últimos años de la escuela superior (Italia y Suiza) (edad de los alumnos: 17-19 años).
A estudiantes que habían ya estudiado el argumento del "infinito matemático" se les propuso las siguientes dos preguntas:

4a) ¿Entre 0 y 1 hay más números reales o más números racionales?

	Entre 0 e 1 hay más racionales	Entre 0 e 1 hay más reales	Los dos conjuntos tienen la misma cardinalidad	No se puede decir
CH	3.33%	75.56%	13.33%	7.78%
I	9.09%	44.44%	35.35%	9.09%
T	**6.35%**	**59.26%**	**24.87%**	**8.47%**

4b) ¿hay más números reales entre 0 y 1 o más números racionales en todo el conjunto Q?

	Más números racionales en Q	Más números reales entre 0 y 1	Los dos conjuntos tienen la misma cardinalidad	No se puede decir
CH	5.56%	48.89%	24.44%	21.11%
I	15.15%	22.22%	38.38%	18.18%
T	**10.58%**	**34.92%**	**31.75%**	**19.58%**

En este caso es interesante ver como un aprendizaje aparentemente exitoso (cerca del 60% de los estudiantes parece haber entendido perfectamente el hecho que la cardinalidad de **R** es mayor que la cardinalidad de **Q**), verificado mediante una segunda pregunta (la 4b), en la cual se pone a prueba su real construcción, muestra un evidente descenso (del 60% de respuestas correctas se baja al 35%).
En este caso, la *estimación* parece requerir de habilidades de alto nivel, fuertemente ligadas con la construcción real de una competencia matemática de hecho poco difundida. Es más: incluso entre los matemáticos de profesión se descubre que la desigualdad $|Q| < |]0,1[| \subset R$ no es del todo dominada (Arrigo, D'Amore, 1999, 2002; Sbaragli, 2003), lo que hace imposible una *estimación* significativa y correcta.

De aquí parte nuestra investigación; en otras palabras, parte del hecho que detrás de estos *Episodios* se esconde algo que la literatura no nos dice. Hipotizamos que una nueva explicación estuviese ligada a la idea de *estimación*, como intentamos explicitar en los comentarios finales de cada episodio.

2. Nuestra investigación

Partiendo de la premisa que existe algo que se puede llamar “sentido del número”, a la base de los “episodios” precedentes (que son sólo algunos de los que podríamos citar), nos pedimos, vagamente por el momento, si se puede declarar que existe algo análogo pero con referencia al infinito, algo que podríamos llamar “sentido del infinito”.
Se trata de un objeto personal del saber que generalmente no culmina en una institucionalización del conocimiento en cuanto no existe un saber codificado que se pueda llamar así. Esto, por tanto, no es objeto de una didáctica explícita en el curso de un currículo escolar.
Si tal objeto de conocimiento matemático existiese, podría entonces traérsele a propósito como apoyo en varias ocasiones en relación con el aprendizaje del concepto de infinito, cuya complejidad ha sido evidenciada en más de una ocasión por la investigación internacional (D’Amore, 1996). Es así como, una prueba en la dirección que nosotros auspiciamos parece tener un notable interés de investigación, con un gran impacto en didáctica.
Nos propusimos, como consecuencia, efectuar investigaciones para poder dar una respuesta a las siguientes preguntas. Para evitar inútiles fragmentaciones, recogemos las muchas preguntas que nos motivaron a realizar la investigación en dos grupos. La primera tipología, **D1**, tiene un carácter básicamente intuitivo y lingüístico; la segunda, **D2**, ofrece una mayor técnica y precisión., Para la primera se incluye, además de los estudiantes que han alcanzado altos niveles de competencia matemática, estudiantes no muy avanzados o personas no propiamente cultas en matemática (estudiantes sin preparación explícita, o maestros de primaria, o personas cultas, pero no en matemática); para la segunda se analizan, más de cerca, únicamente estudiantes con estudios avanzados en matemática o personas cultas en esta disciplina (como, por ejemplo, profesores de matemáticas de cursos superiores).

D1. En el sentido común, ¿existe diferencia entre “grandísimo” (en sus diferentes acepciones semánticas) e infinito? Si es así, ¿cuál? Estudiantes y/o adultos no propiamente cultos en matemáticas, ¿logran dar ejemplos de conjuntos que en verdad tienen un número infinito de elementos, o, confunden “infinito” con “indeterminado” o con “muy grande” o cosas por el estilo? ¿Cuál es el “sentido del infinito” que logran expresar? ¿Existe? ¿Cuándo éste es eventualmente influenciado por la cultura matemática adquirida?
¿Estudiantes o adultos logran distinguir entre “infinito” (entendido como “cardinalidad”), “ilimitado”, extensión infinita, sucesión infinita? En el caso de la extensión, ¿existen diferencias de aceptación entre el caso de una dimensión (línea), de dos (superficie), de tres (sólido)? ¿Cuál es “sentido del infinito” que estas preguntas ponen en evidencia? ¿Existe? ¿Cuánto éste es eventualmente influenciado por la cultura matemática adquirida?
¿Existe diferencia entre el infinito como objeto y el infinito como proceso? ¿El “sentido del infinito” evidencia o es evidenciado por tales diferencias?
¿Qué referencias espontáneas se proponen al entrevistador desde un punto de vista físico o natural (tiempo, espacio, materia, energía, ...)? ¿Cuál es el “sentido del infinito”, si éste involucra factores físicos?
¿Son mayores los problemas para aceptar el término “infinito” como sustantivo o como adjetivo? ¿El “sentido del infinito” es el resultado de la asimilación del infinito como objeto o como proceso?

Si el entrevistado demuestra aceptar espontáneamente el uso de dicho término, ¿qué otros conceptos trae a consideración? ¿Cuál es el sentido que ellos dan a estos conceptos?

D2. Es bien conocido que el axioma del todo y de las partes de Euclides («El todo es mayor de cada una de las partes») se cumple sólo para los conjuntos finitos. Este obviamente pierde validez cuando los conjuntos son infinitos; tan es así que es precisamente esta caracterización la que se usa para definir los conjuntos infinitos "a la manera de Galileo – Dedekind": «Un conjunto es infinito cuando es posible establecer una correspondencia biunívoca con una parte propia ». Una vez aceptado este paso, reservado por tanto a sujetos con una discreta competencia en matemática, se sabe por la literatura que el *aplastamiento* (Arrigo, D'Amore, 1999, 2002) es una misconcepción difícil de superar. Con el *aplastamiento* (como ya lo habíamos dicho precedentemente) entendemos aquella misconcepción según la cual *todos los conjuntos infinitos son equipotentes entre ellos.* Sabemos bien que esta convicción errada viene reforzada por la demostración que N, Z, Q son entre ellos efectivamente equipotente, no obstante la aparente imposibilidad intuitiva causada por los modelos figurales usuales. A este punto, el estudiante termina con creer que demostraciones análogas deben valer para *todos* los conjuntos infinitos. Para entender el pasaje entre el infinito numerable **n** (de N, Z, Q, por ejemplo) y el infinito continuo **c** (de puntos de una recta de un segmento, o de R y de los complejos, por ejemplo), se necesita madurez, competencia, capacidad crítica de alto nivel.
Afirmar, como se hace generalmente, que **n<c**, ¿qué nivel de competencia requiere? ¿Cuántos maestros de matemáticas lo saben realmente o lo pueden entender frente a una demostración? ¿Puede, una demostración, en estos casos, ser instrumento de construcción de conocimiento? ¿Cómo estudiantes de cursos avanzados, por ejemplo de los cursos universitarios, ven esta desigualdad? ¿Cuál es el "sentido del infinito" llamado en causa?
Consideramos que a la comprensión efectiva de tal desigualdad se opone también el obstáculo que se deriva de una demostración dada por absurdo, lo que la hace aún más hostil. Existe además un sutil juego de cuantificadores que probablemente escapa a la mayoría.
A propósito del "sentido del infinito", si consideramos que un sujeto ha demostrado poseer tal "sentido del infinito" se debe verificar: ¿este vale exclusivamente para **n** o también para **c**? ¿Se llega a tener un "sentido de **c**"? Si es así, ¿Cómo? ¿Cuál?

3. Metodología de la investigación

La metodología seguida en la investigación fue absolutamente igual en los tres países participantes.
Decidimos usar sólo TEPs (D'Amore, Maier, 2002) y entrevistas clínicas, centrándonos más en la parte cualitativa y no en la cuantitativa.[12] Temíamos de hecho que las

[12] En realidad, cada uno de los grupos nacionales (Colombia, Italia y Suiza) hizo un análisis cuantitativo de los datos obtenidos que, en este artículo, decidimos no reportar; nos parecía fuera de lugar hacer diferencias nacionales o comprimir los resultados en un análisis sólo cuantitativo, dada la profunda diferencia del número de sujetos que se sometieron a la prueba. Sucesivamente a la publicación de este

respuestas dadas a test escritos de tipo usual pudiesen ser influenciadas por factores ya evidenciados en la literatura internacional, como: deseo de terminar lo más pronto posible, superficialidad en las respuestas, temor a una evaluación, ... El TEP y la entrevista clínica, especialmente si es realizada por investigadores extraños y con extrema tranquilidad y sin ninguna prisa, puede darle seguridad al sujeto; aquí no se trata de hacer preguntas "cruciales" o "patológicas", sino de analizar a fondo las competencias reales, profundas, escondidas, de los sujetos. Las entrevistas, de hecho, duraban mucho tiempo; de todas tenemos las grabaciones sonoras y/o las transcripciones que están a disposición de los investigadores interesados.
Decidimos tomar en consideración:

- estudiantes colombianos, italianos y suizos de las escuelas secundarias
- estudiantes universitarios italianos que siguen el programa universitario de ciencias de la formación primaria (futuros maestros de la escuela primaria)
- estudiantes universitarios colombianos de licenciatura en matemáticas (futuros profesores de matemáticas de la escuela secundaria)
- estudiantes universitarios suizos del curso de licenciatura en comunicación o de la escuela universitaria profesional (tecnológica)

---

artículo, cada uno de los grupos nacionales publicará los resultados encontrados sobre su propia muestra, dando un informe cuantitativo.
Queremos anotar, para evitar equivocaciones, que los resultados obtenidos en los tres países fueron notablemente similares, desde el punto de vista cualitativo, no obstante la profunda diferencia estructural en lo que concierne a la organización de los estudios superiores (escuela secundaria superior, universidad, cursos de postgrado de formación de profesores) y su contenido matemático.
En Colombia, la escuela básica (que corresponde a la escuela obligatoria) dura 10 años y comprende: 1 año de pre-escolar (edades de 5 a 6 años), 5 años de escuela primaria (6-11), 4 años de escuela básica secundaria (11-15), seguido de 2 años de escuela media (15-17); la universidad dura, por norma, 5 años; los futuros profesores de pre-escolar, durante la educación superior, deben cursar 5 años de pregrado ("licenciatura" en pre-escolar o similares); lo mismo para el futuro profesor de primaria ("licenciatura" en pedagogía infantil o similares); el futuro profesor de la escuela secundaria y/o media, también en la educación superior, debe cursar un programa de pregrado que dura cinco años ("licenciatura" en educación básica con énfasis en matemática o "licenciatura" en matemáticas); y es muy difundida la formación de postgrado de los profesores en servicio, de 1 año en promedio para el nivel de especialización en Didáctica de la Matemática y de 2 a nivel de maestría, con el fin de cualificar su propia profesión.
En Italia, la escuela primaria inicia a los 6 años y dura 5 años (de 6 a 11 años); la escuela media dura 3 años (11-14); la escuela superior dura 5 años (14-19); la universidad antes duraba no menos de 4 años ahora con el sistema 3 + 2, los 3 primeros años se constituyen en "laurea" y los 2 siguientes en la especialización; el futuro profesor de la escuela primaria o de la escuela de infancia, después de la escuela superior, debe asistir a un curso de "laurea" que dura 4 años; el futuro profesor de matemática de la escuela secundaria debe hacer seguir a su "laurea" un curso de especialización.
En Suiza, la escuela primaria inicia a los 6 años y dura 5 años (6-11); la escuela media dura 4 años (11-15); la escuela superior dura 4 años (15-19); la universidad tiene una duración variable; el futuro profesor de la escuela de infancia o de primaria, después de la escuela superior, debe asistir a un curso de 3 años en la "Alta Escuela Pedagógica"; el futuro profesor de escuela secundaria, después de la "laurea" (de 4 años), una vez superado el concurso – que incluye la presentación de título obtenido y la presentación de una lección de prueba- es asumido al 50% y en el resto del tiempo debe asistir a un año de formación en la "Alta Escuela Pedagógica", que prevé un examen final de habilitación para la enseñanza. Próximamente la organización cambiará y quedará: el candidato debe poseer un diploma de "bachelor" en una disciplina y debe inscribirse a un curso bienal de tiempo completo, que al final, superando todos exámenes previstos, se hará acreedor de un título de maestría para enseñar en dos disciplinas; la segunda disciplina (dicha disciplina del master) la escogerá el candidato.
Sobre las diferentes filosofías para la formación de docentes en diversos países, véase Fandiño Pinilla (2003).

- maestros colombianos e italianos en servicio de la escuela primaria y secundaria
- personas sin relación con el mundo de la escuela ni con el mundo académico, de alto nivel cultural, colombianos e italianos.

El número total de sujetos que participaron en la prueba fue el siguiente:

- relativa a la pregunta de investigación **D1**: 130 colombianos, 298 italianos y 579 suizos para un total de 1007 sujetos
- relativa a la pregunta de investigación **D2**: 20 colombianos y 16 italianos, para un total de 36 sujetos.

La gran diferencia entre el número de participantes en **D1** y en **D2** depende de un hecho obvio; para poder proponer las preguntas de **D2**, se necesita una fuerte competencia sobre aspectos que tienen que ver con la cardinalidad **n** del numerable y **c** del continuo, lo cual reduce notablemente el universo de la muestra al interior de la cual elegir los sujetos; además la metodología de la investigación adoptada en **D2** es exclusivamente de entrevista clínica, lo cual comporta un notable empeño y mucho tiempo a disposición.
Para intentar dar respuestas a las preguntas anteriores, fue necesario clasificar las respuestas ya sea sobre la base del tipo de instrumento (TEP o entrevista), pero también sobre la base de la tipología de los entrevistados.
Los TEPs y las entrevistas se desarrollaron en la escuela o en la universidad, en el caso de estudiantes, de estudiantes de postgrado o de maestros en servicio; y en lugares idóneos, en el caso de personas genéricas.
Las entrevistas fueron conducidas por dos investigadores; uno de los investigadores efectuaba las preguntas mientras otro escuchaba y registraba (en algunos casos se registraba toda la entrevista clínica, en otros casos sólo los puntos sobresalientes).

4. Los temas de las entrevistas

Daremos un bosquejo general de los contenidos de los TEPs en el desarrollo del apartado **5.**, por comodidad de lectura.
Aquí haremos sólo un bosquejo de las entrevistas clínicas; todas estas iniciaban de la misma forma, pero se desarrollaban en modalidades netamente diversas, según la competencia o de la madurez demostrada por el sujeto entrevistado.

Además de pedir una profundización acerca de las propias declaraciones hechas en los TEPs, al entrevistado se le pedía formular algunos ejemplos:

- de una cosa grande (A)
- de un número grande (n)
- de una cosa más grande de A (B)
- de un número más grande que n (m)
- de una cosa infinita (C)
- de un número infinito (p),

con el sólo objetivo de evaluar las reacciones individuales.
A través del análisis de los TEPs y de las entrevistas clínicas, se evalúo si el entrevistado tenía intuiciones diversas a propósito de:

- infinito (como cardinal)

- ilimitado
- infinito como extensión (1D, 2D, 3D).

A través del análisis de los TEPs y de las entrevistas clínicas, se evalúo si el entrevistado tenía una mayor propensión a aceptar el infinito como:

- proceso
- objeto.

Se verificaba a cuáles hechos físicos naturales el sujeto recurre con mayor frecuencia hablando de infinito:

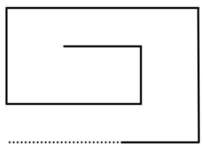
- tiempo, espacio, materia, energía, ...

Se verificaba si tenía mayor propensión a utilizar la palabra “infinito” como

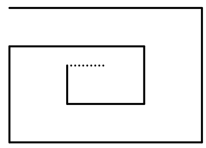
- sustantivo
- adjetivo.

Sólo a personas con una fuerte formación en matemática se les planteaba el discurso de la diferencia entre **n** y **c**. Se buscaba entender si emergía el aplastamiento, qué tipo de competencias tenían en realidad, si aceptaban la doble naturaleza del infinito o si se doblegaban al aplastamiento.
Si **n** y **c** eran aceptadas junto con el hecho que **n** < **c,** se trataba de indagar a fondo sobre las reales competencias necesarias para entender la desigualdad precedente.

Veamos algunas de las preguntas dadas, para iniciar la discusión de las entrevistas clínicas.



¿Se puede continuar al infinito?



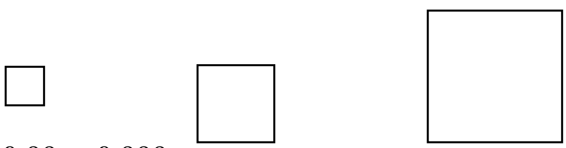
¿Se puede continuar al infinito?

La misma pregunta para las sucesiones:

0 1 2 3 4 5 …

1 ½ 1/3 ¼ 1/5 …

0 ½ 2/3 ¾ 4/5 …



…

0,9 0,99 0,999 …

En una hoja aparece escrito lo siguiente; el entrevistador debía elegir parejas que el sujeto entrevistado debía comparar:

¿Existen más … o más …?

granos de arena sobre la playa de Cartagena
gotas de agua en el lago de Lugano
hierba de todo el campo en el departamento de Cundinamarca
seres humanos sobre la tierra
estrellas en el universo
números naturales múltiplos de 106
letras alfabéticas sobre todos los libros publicados en el mundo
cabellos en todas las cabezas de todos los suizos
hojas de los árboles de la selva amazónica
hormigas de toda América del Sur
puntos en un segmento de 2 cm de longitud
átomos del Monte Blanco
granos de arroz en todos los supermercados del mundo
microbios presentes en toda Europa
…

A estudiantes de los niveles superiores se les pedía: ¿Dónde hay un mayor número de puntos: en el segmento que tiene como extremos A y B incluidos los extremos Ay B ([AB]) o en el segmento AB al cual se le quitó el extremo B [AB[)? [13]. ¿Procediendo así, se puede llegar a un segmento que no tiene puntos?; ¿después de cuántos pasos?; ¿se pueden "contar" dichos pasos?
A los sujetos se les proponía 3 texto – estímulo que los impulsaba en la redacción de los TEPs; dichos textos se presentarán en **5.1.**; una vez que los investigadores habían analizado los TEPs, algunos sujetos eran elegidos para realizar con ellos una entrevista clínica; la cual iniciaba siempre con el análisis de los TEPs elaborados; después se desarrollaba la entrevista, sirviéndose de los test – estímulo reportados líneas arriba o de otros (análogos). Tales test – estímulo eran idénticos en los tres países que participaron en la investigación, con pocas variaciones locales debidas a la contingencia, pero sin ningún interés para la investigación.
Como se ve, se trata de preguntas "clásicas" de la investigación sobre el tema del infinito; pero, como ya lo habíamos evidenciado, nuestra intención era interpretar las respuestas escritas (en los TEPs) y orales (de la entrevista clínica) sobre la base del "sentido del infinito" y de la "estimación", por tanto, en forma por demás diferente de cómo la literatura clásica internacional ha tratado el tema.
Con algunos sujetos particularmente avanzados (estudiantes de los cursos de licenciatura en matemática o cursos a estos similares, estudiantes universitarios que demostraban particular interés, estudiantes de los cursos de postgrado en formación de profesores de matemática, profesores de matemática de la escuela primaria particularmente interesados, profesores de matemática de la escuela secundaria, para un

[13] En este artículo se usa la simbología matemática difusa en España; pero, en la investigación se recurrió a la terminología propia de cada país.

total de 36 sujetos) se procedía, dando la demostración de algunos teoremas clásicos:[14]

- la correspondencia biunívoca entre N y Z, entre N y Q, de la cual se concluye que Z y Q tienen la cardinalidad **n** del numerable
- la imposibilidad de establecer una correspondencia biunívoca entre N y]0, 1[($\subset$ R), de la cual se deduce que R tiene una cardinalidad mayor de la de N
- la correspondencia biunívoca entre los conjuntos de puntos de dos segmentos de diferente longitud, entre segmento y semirrecta, entre segmento y recta
- la correspondencia biunívoca entre el conjunto de puntos de un cuadrado y el conjunto de puntos de uno de sus lados.

La parte final de la investigación, en la cual, de los tres países, participaron sujetos en número limitado, fue dedicada a la entrevista clínica, durante y después de haber sido propuestas estas demostraciones.

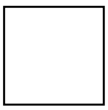
5. Resultados de la investigación

5.1. Relativo a D1

Como ya lo habíamos dicho, la recolección de datos fue hecha a través de los TEPs y de las entrevistas clínicas sobre la base de lo que cada uno escribió. Los texto- estímulo son presentados a continuación, uno a la vez, por comodidad en la lectura.
Se trata de tres situaciones que involucran el infinito actual, descritas mediante diálogos entre dos personajes; esta elección fue hecha a fin de hacer menos formal la entrada en el tema por parte de los entrevistados.

TEP 1

En un cuadrado de lado 10 cm
hay infinitos puntos ...



10 cm

También en un lado del cuadrado
hay infinitos puntos

10 cm

En el cuadrado hay muchos más …

Para mí que hay infinitos puntos en ambos

Seguramente en todo el plano
son aún muchos más

Tal vez esta vez tu tienes razón!

¿Tú, qué opinas?

En más de la mitad de los sujetos que han trabajado en el TEP 1 se evidencia el efecto “aplastamiento”. Se revela una cierta tendencia, más evidenciada en Italia y en Suiza, a un aumento porcentual con el aumentar de la edad y por tanto con el grado escolar; en el caso colombiano, al contrario, el efecto es invertido: mayor entre los sujetos más

[14] Se omiten los varios pasajes matemáticos de cada una de las demostraciones, considerando que son bien conocidas por los lectores de este artículo. Sin embargo estas se encuentran, para quien desea estudiarlas, en cualquier texto bien estructurado, incluso de divulgación, que trate estos argumentos (Arrigo, D’Amore, 1992).

jóvenes. No se trata, en todo caso, de diferencias relevantes.
Una tercera parte de los sujetos sostiene que en una figura limitada (segmento o cuadrado) no puede haber infinitos puntos, mientras que esto parece posible en una figura ilimitada (recta o plano). Parece clara la confusión entre "infinito" e "ilimitado", ya revelada por la literatura de la investigación internacional (D'Amore, 1996, 1997).
Sujetos jóvenes aseguran que en el lado y en el cuadrado no existen infinitos puntos; aseguran que los puntos del lado y del cuadrado deben ser "muchísimos" o expresiones análogas.
Notable la presencia porcentual de sujetos avanzados (comunes en todos los países en forma masiva) que sostienen que las cantidades infinitas no se pueden ni contar ni confrontar, mientras en los sujetos menos evolucionados escolarmente esta limitación no se da de forma tan clara. Aparece evidente el hecho que, incluso en los sujetos evolucionados, "infinito" es sinónimo de "indeterminado". En algunos sujetos más jóvenes aparece clara la idea de "infinito" como sinónimo de "número grandísimo" (pero finito).
Algunos sujetos evolucionados aseguran que "cardinal de un conjunto infinito A" es sólo una forma de decir; a diferencia de "cardinal de un conjunto finito", tal expresión significaría que A no se puede numerar.
El efecto dependencia (de las medidas o de las dimensiones) se estabiliza alrededor de una tercera parte o un poco más de los sujetos examinados, pero aparece menos marcado en los sujetos evolucionados, probablemente como efecto de una enseñanza específica. Este hecho es común en todos los países.
Son muchos los sujetos cuyas respuestas escritas por medio de TEP no pueden ser catalogadas.
Una vez examinados los textos producidos como TEP 1, se eligieron los sujetos para una entrevista clínica (40 en Suiza, 15 en Italia y 8 en Colombia).
Para conducir las entrevistas clínicas, siempre se parte del análisis de los TEPs producidos por los sujetos, pero después se ponen en juego las solicitudes ilustradas anteriormente.
En relación con los sujetos entrevistados, evidenciamos la pertenencia a las siguientes categorías.[15]

Primera categoría: el infinito visto como número, tal vez grande, pero finito (o genéricamente como ilimitado)

Para estos sujetos el infinito es un número natural que no es posible imaginar, dado lo grande que es. Algunos de estos sujetos, también durante el diálogo, no admiten la existencia del concepto de infinito así como lo conciben los matemáticos (el infinito actual es evitado por casi todos). Ellos, coherentemente con su idea de infinito, no admiten que la figura geométrica limitada (en los textos-estímulo: un cuadrado y un segmento, dos segmentos de diferente longitud, un segmento y un cubo, ...) pueda tener infinitos puntos, en el sentido actual. Generalmente este hecho está ligado a la

[15] Se advierte que las categorías aquí presentadas son algo genéricas, respecto a aquellas que se podrían presentar, esto porque se trata de coordinar resultados con sujetos diversos, en condiciones diversas, en países diversos, con historias culturales diversas. Como ya lo hemos dicho, a este artículo seguirán otros tres, cada uno específico para el grupo de investigación nacional; en estos será más fácil elaborar estrategias de categorización más específicas y determinantes.

materialidad atribuida a los objetos de la matemática, hecho ya reconocido por algunos de nosotros en otras ocasiones (Arrigo, D'Amore, 1999, 2002; Sbaragli, 2003, 2004).
Veamos algunas de las frases reportadas de las entrevistas clínicas:[16]
«Si se continua a llenar un cuadrado con puntos, en un cierto momento no es posible poner más... al menos que se pongan uno sobre el otro»;
«Yo no logro pensar que en un espacio finito o en una medida finita puedan existir infinitos puntos [...] se que en un segmento hay infinitos puntitos pero si alguno me pide cuántos puntos tiene, yo imagino mentalmente los puntos que cubren el segmento e inmediatamente diré este número y no respondería "infinitos puntos"»;
«[...] para mi no existen infinitos puntos ni aquí [en el cuadrado] ni aquí [en uno de los lados]. En un espacio finito no es posible que existan infinitos puntos»;
«Yo pienso que el infinito, precisamente por ser infinito, no es cuantificable; si después se le considera en relación al punto, se vuelve aún más difícil, diría imposible, establecer la cantidad. Considero que contar, cuantificar la infinitud de los puntos, siempre que sea lícito hablar así, sea una operación insensata que no lleva a ningún resultado además porque, repito, materialmente es imposible»;
«Lo lamento, pero ninguno me ha enseñado qué es el infinito, pero pienso que sea alguna cosa en la que la cantidad no esta bien definida»;
«[...] tanto al aumentar como al disminuir existirán cosas que presentan una gran dificultad para ser cuantificadas y no podrán ser contadas y es por esto que se dice aumentar o disminuir al infinito» [...] Entre los números hay muchos números y dado que no hay una cantidad se puede establecer que hay infinitas partes».

Segunda categoría: el infinito no se reduce a un número, por grande que sea, pero asume un sentido relativo respecto de otro aspecto
Algunos sujetos, muy pocos en realidad, piensan el infinito como alguna cosa que supera un finito enorme; se dieron dos tipos:

con referencia a la física (universo), como en el siguiente ejemplo en el cual el finito enorme es el universo y el infinito es el espacio que lo contiene: «Dado que el universo es lo que ya existe a través de la explosión y la evolución de los planetas y toda esa historia, el espacio debe estar donde está el universo y puede continuar expandiéndose porque tiene una medida, y cuando se dice medida infinita significa que la medida no puede ser calculada y si dicen que tiene una medida de 200 mil millones de años luz, entonces está calculada y no podría declararse que es infinita, porque el infinito es no saber cuál es la medida final, por tanto en la idea general de las personas diría universo, porque uno siente a las personas hablar de universo como lo más grande que tiene el infinito, pero con esta idea quedaría definido lo que es infinito; mejor sería el espacio»;

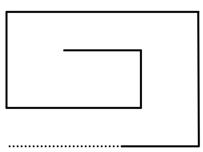
con referencia a las magnitudes, como en este ejemplo en el cual parece que el infinito de unas determinadas magnitudes dependa del hecho que estas no puedan ser expresadas sobre la base de las otras: «[El infinito es] algo tan grande o tan pequeño que no se puede medir con algo que sea manipulable... Sí, en general, si son

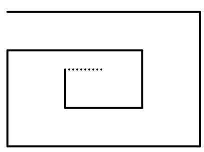
[16] Las frases que siguen se transcribieron exactamente de como aparecen en las grabaciones; el uso de la puntuación, inserta de parte nuestra, recalca las pausas del sujeto y tiene la intención de dar sentido a frases orales que, como sucede muchas veces, no son evidentes. Las traducciones de las frases de las entrevistas clínicas del español al italiano reproducen el sentido de las frases mismas y no las características sintácticas y semánticas específicas.

homogéneas y con más veces de una no se puede superar la otra es porque la otra es más grande, es infinita».

Tercera categoría: el fenómeno del aplastamiento
Siendo el infinito una categoría que no se puede someter a ulteriores clasificaciones, todos los infinitos son iguales entre ellos; para la mayor parte de los sujetos que hacen esta consideración o consideraciones similares, el infinito es visto como *una entidad numérica* que no puede ser precisada, es más una forma de decir, que un objeto posible de objetivación matemática.
Veamos algunas frases tomadas de las entrevistas clínicas:
«[…] Si dos conjuntos son infinitos, son infinitos y basta»;
«Diciendo infinitos, ya se ha dicho todo, más de esto es imposible»;
«Para mí los dos son infinitos, porque de cualquier forma no puede existir un infinito más numeroso [cancela "numeroso" y escribe "grande"] que otro. Ambos son infinitos»;
«Infinito es como decir que no se puede… es decir; si no se puede para uno, no se puede tampoco para el otro y así son iguales; por tanto todos son iguales porque no se puede para ninguno; [Pregunta: ¿Qué es lo "que no se puede"?] ¡Eh! si no se puede decir nada, ¿cómo hago para decir cuántos son?»;
«Disculpe, pero si estos son infinitos, también estos lo son, y todos los infinitos, son infinitos y basta»;
«Considero que, si los puntos son infinitos, no es posible decir hay una mayor o menor cantidad en un puesto o en el otro, el hecho es que son infinitos, y ser infinito es como decir que no tiene fin y por tanto no es posible establecer un cardinal de cada uno de estos para poderlos comparar»;
«No, no, es decir, porque si se dice que es infinito yo no podría asignar a este conjunto de los números naturales un número, el conjunto de los números, el conjunto de los números naturales tiene cien mil números, doscientos mil números, no podría decir esto, no, no, el proceso de contar no terminaría nunca y yo no podría permitirme asignar un cardinal a este conjunto».

Cuarta categoría: la divergencia entre el infinito aprendido en la escuela y la propia imagen mental
Estos sujetos reconocen una importante distinción: de una parte entienden que en matemática tiene sentido admitir que una figura geométrica limitada puede tener infinitos puntos, pero ellos, en lo profundo de la competencia adquirida y conceptualmente construida, mantienen la imagen de los puntos físicos y por tanto afirman que en la realidad (que para ellos es extraña y en muchas ocasiones en contradicción con la matemática) una figura como la que se les presentó no puede tener infinitos puntos. Esta observación fue propuesta en más de una ocasión, en los tres países, incluso por sujetos expertos que, entre otras cosas, tuvieron la ocasión de demostrar que tenían una imagen correcta de punto geométrico, por lo menos sobre la base de las declaraciones explícitas sobre este preciso tema. De otra parte, como ya lo habíamos manifestado, la literatura internacional de investigación ha evidenciado casos de contradicción explícita de este tipo, precisamente en hechos ligados al infinito en estudiantes con un alto nivel escolar.
En particular, en la pregunta relativa a la espiral,



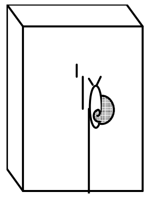


¿se puede continuar al infinito?   ¿se puede continuar al infinito?

caso A   caso B

aparece muchísimas veces el hecho que se puede continuar al infinito en el caso A, dado que la espiral «se abre hacia el plano» (de todos considerado infinito, pero en el sentido de ilimitado), pero NO se puede continuar al infinito en el caso B.
A algunos de los sujetos se les presentó demostraciones adaptadas a su nivel escolar con el fin de ver si estas tenían un efecto de convencimiento. Este hecho evidenció un interés específico que se tratará en profundidad en **5.3.**
Algunas de las frases reportadas con anterioridad pueden ser consideradas también parte integrante de esta categoría; veamos otras frases tomadas de las entrevistas clínicas:
«No, es que se dice infinito, en la escuela, generalmente, cuando existen cosas así [conjunto de los puntos de un segmento], pero todos saben, yo creo que incluso el profesor, que es una forma de decir, todos lo saben, es como un axioma: se dice así y basta; pero una cosa es lo que obligan [sic!] a decir, y otra es lo que en verdad sucede. Si yo debo decir infinito, lo digo y basta; pero después, que infinito y infinito…»;
«Infinito no existe en ninguna parte, si por fuerza lo debo dibujar lo hago y es finito [se refiere al segmento]; nada ... Cierto, si pienso en prolongar [el segmento] entonces parece que no tengan fin, verdad? Reto a cualquiera a hacerlo [se refiere: a dibujar una recta]. [Pregunta: ¿y los números naturales?] Ah!, no, esa es otra cosa, si agrego uno, después uno, después uno, pero no es tanto que sean infinitos, sino que la serie no termina nunca»;
«Una cosa que leí es que los infinitos son diversos, uno es más grande que el otro; pero para mi, dos conjuntos con infinitos elementos tienen el mismo número de elementos aunque no estén en correspondencia biunívoca»;
«Según mi opinión, existen infinitos puntos en ambos porque por cada punto del cuadrado podemos encontrar un punto sobre el lado del cuadrado que le corresponde. Como consecuencia si en un cuadrado hay infinitos puntos también el lado del cuadrado tiene infinitos puntos. El mismo razonamiento se puede hacer para todo el plano. Existe siempre una correspondencia. [...] Me es difícil de todas formas pensar que en el cuadrado hayan tantos puntos como en todo el plano»;
«[…] Y eso que del libro lo había entendido así, por tanto lo creo. ¿Y entonces?. No sé qué pensar. Lástima, me parecía verlo bien [...]. A este punto, tal vez hay más puntos en el cuadrado»;
«[…] Según el sentido de la sucesión de los puntos puedo decir que existe un límite de espacio y por esta razón no puede continuarse al infinito».

TEP 2



Un caracol está escalando un muro.
En la primera hora sube hasta la mitad.
En la segunda hora, cansado por el esfuerzo anterior, sube sólo la mitad del espacio recorrido antes.
En la tercera hora, siempre más cansado, cumple la mitad del recorrido hecho en la hora precedente.
Y así sucesivamente…..

Para mí no llegará nunca a la meta

Sí que llegará: piensa que después de sólo dos horas ha recorrido los tres cuartos del camino…

¿Tú qué piensas?

Más de una tercera parte de los sujetos sometidos al TEPs afirma que el caracol no llegará nunca a la cima del muro, con una punta máxima de más del 40 % alcanzado por los sujetos matemáticamente más evolucionados de Italia y Suiza y, al contrario, por los menos evolucionados en Colombia.
Un porcentaje no despreciable de sujetos (entre un cuarto y un tercio, con puntajes más altos en Colombia) considera que el caracol llegará después de un cierto tiempo que algunos estiman en horas, otros en días, meses o años. Una buena parte de los sujetos considera que el caracol llegará, pero lo expresan en tiempo. Pocos sujetos ponen el acento sobre la altura de la pared.
Existen también respuestas imposibles de catalogar.
Una vez examinado el TEP 2, se eligieron sujetos para realizar con ellos la entrevista clínica (40 en Suiza, 15 en Italia y 8 en Colombia).
Para conducir las entrevistas clínicas, siempre se parte del análisis de los TEPs producidos por los sujetos, pero después se orientan hacia los tópicos que se mencionaron anteriormente.
En relación con estos sujetos, entrevistados uno a uno, establecimos su pertenencia a una de las siguientes categorías.[17]

Primera categoría: atención dada al camino recorrido por el caracol
Casi todos estos sujetos afirman que el caracol logrará llegar a la cima porque, continuando en el camino, después de “mucho tiempo” llegará a la meta. Pero el “mucho tiempo” se estimaba en cantidades finitas que varían de las pocas horas a algunos años. En general, los sujetos advierten la presencia de cantidades infinitas que se adicionan, pero estos “infinitésimos” son considerados como cantidades

[17] Valen las mismas notas precedentes sobre las categorías, frases reportadas y traducciones. La presente nota no será repetida ya que la misma observación vale para los análogos puntos siguientes.
Debemos, pero, agregar otra consideración. Las categorías que decidimos proponer aquí, en el apartado **5.**, están basadas en el tipo de respuesta dada por los sujetos de la investigación y aparentemente no están ligadas con las preguntas que se presentaron en **4.** Elegimos de centrarnos en el comportamiento de los sujetos examinados. Veremos como estos sujetos toman en seria consideración la referencia, para nosotros innecesaria, de los objetos propuestos específicamente (el caracol, el muro, ...) y no el sentido profundo y lógico de las preguntas. Sin embargo, en el apartado **6.**, al momento de responder a las preguntas presentadas en el apartado **4.**, usaremos los resultados del apartado **5.**, en forma circunstanciada y específica.

pequeñísimas, pero constantes. Un sólo sujeto sostiene que el caracol llegará a la cima en un tiempo infinito.
Reportamos aquí algunas de las frases encontradas en las entrevistas clínicas:
«Si no se cansa, llegará a la cima, seguro, pero ¿cuánto tiempo se tardará? Al ver así, mucho tiempo aún, mira cuánto camino que ha recorrido»;
«Si, cierto [que llegará a la cima]; más o menos puede alcanzar la cima, eh!, ya ha recorrido gran parte del camino en dos horas, ¿otras dos? ¿Es así?»;
«Un paso cada vez, siempre más pequeño, ya ha recorrido mucho camino, aún aún [y dibuja sobre el papel trazos pequeños], pequeñísimos, infinitésimos... [Pregunta: entonces, ¿llegará a la cima o no?] Yo creo que sí, pero tal vez necesitará años y años».

Segunda categoría: atención puesta en el camino que el caracol debe recorrer
Estos sujetos generalmente no creen que el caracol logre llegar a la cima, «porque, después de cada hora de camino, le queda siempre más camino por recorrer». La experiencia de vida de estos sujetos los obliga a admitir que el caracol "antes o después" llegará a la cima: observamos de nuevo una divergencia entre matemática (modelo matemático) y realidad (vida cotidiana).
Pensando en las partes del camino aún no recorridas, la mayor parte de los sujetos imaginaron cantidades pequeñísimas pero constantes. Aquellos que respondieron con seguridad que el caracol llegará a la cima, manifestaron haber pensado en cantidades pequeñísimas pero variables, que siempre se vuelven más pequeñas.
Reportamos aquí algunas frases tomadas de las entrevistas clínicas:
«Entonces, yo razono así. Hay pedacitos que faltan, pero siempre son más pequeños y cada vez es una hora; camina camina, de hora en hora, se hacen días y años, por tanto me viene espontáneo decir que no, que no llegará nunca; pero, de todas formas, si resiste, se trata sólo de un trozo finito»;
«En la primera hora, le falta la mitad, en otra hora lo lograría, pero no, el juego no es así; por tanto en otra hora tiene los 3/4; otra hora y tiene los 7/8; le falta siempre menos siempre menos, 15/16, así. Sin embargo, una pequeña parte falta siempre, 1/16, 1/32, por tanto no, no lo puede lograr. Pero no sé, si en verdad, el caracol, en verdad lo logra, yo creo que sí puede llegar a la cima; ¿sabe por qué? Porque los partes [que faltan] son pequeñitas»;
«Tantas partes de muro [las que faltan en la subida] todas pequeñísimas, así que el caracol llegará de seguro a la cima, en últimas debe ser así!»
«Sí, cada vez más pequeña, pequeña, pequeñísima, por lo que llegará de seguro».

TEP 3

Esta vez el reto lo propongo yo: gana quien logre encontrar el número más grande que inicia con 0,…

Yo digo : 0.9
¡Gané!

0,99
¡Gané yo!

0.999
¡Gané yo!

Ahora yo digo $0,\overline{9}$

¡No es justo! Eso vale 1.

No es verdad.
Admítelo: no sabes perder.

Si tú fueras el árbitro en este reto, ¿a quien le darías la victoria? y, ¿por qué?

La gran mayoría de los entrevistados consideran que $0,\overline{9}$ no es igual a 1 y los porcentajes son altísimos también en los sujetos de alto nivel escolar. (Sólo entre los estudiantes de la escuela universitaria profesional Suiza, por efecto de una enseñanza anterior explícita, varios sujetos admiten la igualdad).

Entre los sujetos sometidos a la prueba en Italia y en Suiza, ningún estudiante universitario de ninguna facultad, admite la igualdad entre $0,\overline{9}$ y 1 ni siquiera entre los estudiantes de postgrado; en Colombia por el contrario 7 estudiantes universitarios (del curso de Licenciatura y de postgrado) sobre 53 (15%) declaran que la igualdad vale.

Son muchos los sujetos que no pueden ser catalogados, pero se trata casi exclusivamente de estudiantes con bajos niveles de escolaridad.

Una vez examinado el TEP 3, se eligieron sujetos para realizar con ellos las entrevistas clínicas (40 en Suiza, 15 en Italia, 8 en Colombia).

Para conducir las entrevistas clínicas, siempre se parte con el análisis de los TEPs producidos por los sujetos, pero después se ponen en campo las solicitudes ya ilustradas anteriormente.

En relación con estos sujetos, entrevistados uno a uno, establecimos su pertenencia a una de las siguientes categorías

Primera categoría: atención puesta en la suma 0,9+0,99+0,009+ ... ó en la sucesión 0.9, 0,99, 0,999, …

Algunos sujetos, aún expresándolo en forma diferente, no aceptan la igualdad entre $0,\overline{9}$ y 1, porque aseguran que, agregando otros 9 después de la coma, momento por momento, por tanto al finito, nos acercaríamos siempre más a 1, pero nunca lo alcanzaríamos y generalizan así la situación, por lo cual no se llega a alcanzar la "meta".

La escritura $0,\overline{9}$ no viene considerada como algo o como una cosa en acto, es considerada sólo como un símbolo que hace referencia a un proceso potencial como, de otra parte, la literatura internacional de investigación había ya reportado desde tiempo.

Veamos algunas frases tomadas de las entrevistas clínicas:

«Si yo escribo 0,9, esto es casi 1, pero no es 1 porque le falta 0,1; pero si yo agrego 0,09 me encuentro a 0,99 que es siempre más cerca de 1, pero no es 1 porque le falta 0,01; pero si yo agrego 0,009 me encuentro ya a 0,999; siempre así, la suma crece y crece pero le falta siempre 0,0000001 también con infinitos ceros, siempre alguna cosa falta, a 1 no se llega nunca porque cada vez le falta un poco»;

«Sí, entendí, es como un truco: quiero llegar a la meta que es 1 y hago como el caracol, primero 0,9, después 0,99, después 0,999 y así sucesivamente siempre 9, sería como decir que hago un paso a la vez de 0,9, después 0,99, después 0,999. Sí, se ve que están siempre más cerca de 1, pero es obvio que no se puede llegar nunca»;

«Ah!, si fuera igual ¿porque escribirlo así [indica $0,\overline{9}$]? Tanto vale escribirlo normalmente, [indica el 1]; si lo escriben así [indicando de nuevo $0,\overline{9}$], quiere decir que es diverso y ¿quiere saber porqué? Porque ganó aquel [hace referencia a los dos personajes de los estímulos por el TEP 3] que no cree [que no cree en la igualdad] porque puede poner tantos como quiera [de 9], incluso uno y después uno y después otro, pero a 1 no llega nunca, sí, se ve que 0,999999 no puede ser 1».

Segunda categoría: atención puesta en las diferencias entre $0,\overline{9}$ y 1.

También estos sujetos no aceptan la igualdad entre $0,\overline{9}$ y 1, argumentando que falta siempre algo y que se puede expresar como 0,0…01.
Durante las entrevistas clínicas surge explícitamente que algunos de ellos admiten que "la última cifra 1" no puede ser escrita y entonces declara que la diferencia puede ser expresada como 0,000.... 0....
Algunos sujetos declaran que no se excluye que matemáticamente esta igualdad pueda ser válida, pero, en la realidad esto no es posible, manifestando la conocida "divergencia" entre matemática y realidad.
Algunas de las frases de la categoría precedente podrían ser usadas también aquí. Veamos algunas otras frases tomadas de las entrevistas clínicas:

«Sí yo escribo $0,\overline{9}$ entonces para llegar a 1 necesitamos 0,1 [el entrevistador le hace notar el error] Ah! sí, decíamos que si escribo tantos 9 [después del 0,], entonces el 1 aparece lejano después de la coma. Así: a 0,999999, nos falta 0,000001. Aquello que falta, cada vez, es cero, después muchos ceros, después 1, falta siempre, nunca es igual a 1»;
«[Más o menos hace un discurso análogo al anterior, después prosigue] Veamos, si yo pudiera continuar después y después al infinito, entonces la diferencia debería ser 0, 0000000… pero la cifra 1 al infinito, la última cifra 1, no puede ser escrita, aunque la diferencia siempre existe, pero es 0,000…0…»;
un sujeto declara que esta diferencia es cero y entonces reconoce espontáneamente que si la diferencia entre dos números es cero los dos números deben ser iguales.

5.2. Relativo a D2

Como habíamos ya dicho en **3.**, fueron incluidos en estas pruebas 20 sujetos colombianos y 16 italianos, para un total de 36. El número relativamente bajo, depende del hecho que los potenciales sujetos para entrevistar, debían demostrar notables competencias matemáticas; las entrevistas clínicas tenían, en estos casos, una larga duración, debido a la necesidad de hacer que los sujetos no sólo respondieran a la pregunta-estímulo, sino que además tuvieran el tiempo y el modo para reflexionar y eventualmente contradecirse y repensar todo lo que ya habían afirmado,… Como ya lo habíamos dicho, a algunos de estos sujetos particularmente maduros se les propusieron algunas demostraciones, sobre las cuales haremos referencia en **5.3.**
¿Cuáles son las competencias de base que hemos considerado como necesarias para elegir los sujetos con quienes efectuar estas pruebas?
Establecimos elegir aquellos sujetos que:

- aceptasen la idea del infinito como cardinal, por tanto que estuvieran dispuestos a admitir el infinito actual y no sólo potencial
- aceptasen o al menos no refutasen a priori la idea que pueden existir distintos niveles de infinito.

A los posibles candidatos a estas pruebas se les preguntaba preliminarmente si las siguientes parejas de conjuntos pudiesen ser consideradas equipotentes:

- $\{n, n \in N \mid n$ es múltiplo de $45\}$, $\{n, n \in N \mid n$ es múltiplo de $347\}$, (o similares);
- el conjunto de puntos de un segmento de largo 2cm y de un segmento de largo 2m (o similares).

Las respuestas a estas preguntas, entre otras cosas interesantes, constituían un elemento de selección, y en otras ocasiones argumento para la misma entrevista clínica.
A los candidatos se les pedía si conocían y/o aceptaban demostraciones:

- por absurdo
- que requirieran un uso sofisticado de cuantificadores.

Estas condiciones preliminares demostraron que:

- son poquísimos aquellos que admiten que los dos conjuntos de la primera pareja (números naturales) nombrada arriba puedan ser equipotentes entre ellos; algunos ponen el acento sobre el número que aparece entre llaves como si esto pudiera hacer la diferencia: «Hasta un cierto punto se puede también creer en esto pero, por encima de un cierto valor, no»; aparece obvia la incidencia que un modelo de infinito tiene sobre "el sentido del infinito" funcionando como barrera; estamos de frente a un obstáculo didáctico y epistemológico;
- son poquísimos aquellos que admiten que los dos conjuntos de la segunda pareja (puntos del segmento) mencionada arriba puedan ser equipotentes entre ellos; alguno hace notar que «si fuese así la cosa resultaría absurda: si no dependiera de la longitud, entonces cómo se podrían distinguir entre ellos los segmentos? »; aquí aparece obvia la incidencia de un modelo ingenuo (el punto como "perla" de un collar más o menos largo) sobre "el sentido del infinito"; el modelo del collar actúa como un bloqueador; otro obstáculo didáctico y epistemológico;
- prácticamente todos los sujetos que se acercaron en calidad de potenciales entrevistados, admiten conocer y aceptar la demostración por absurdo y saber hacer un buen uso de cuantificadores, aunque si sucesivamente se presentaron problemas en los dos aspectos.

Elegidos los pocos sujetos considerados idóneos, comenzaron las entrevistas clínicas, a veces largas y complejas, cuyos registros están a disposición de los investigadores. Cada grupo nacional, colombiano e italiano, estudiará más a fondo los propios resultados, llegando a escribir relaciones específicas del propio país sobre este tema. En esta ocasión nos limitamos a reportar los resultados más generales.

Se confirman, también con argumentaciones de más alto nivel, las siguientes posiciones:

- N tiene cardinalidad menor que Z (se recurre al modelo gráfico usual):
  «El conjunto de los enteros supera aquel de los naturales porque el conjunto de los enteros tiene números negativos, cosa que no tiene el conjunto de los naturales»;
- conjunto infinito es sólo un modo de decir, el concepto de cardinal vale sólo para los conjuntos finitos:
  «Yo sé qué quiere decir que $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ tiene cinco elementos, pero, no tiene sentido preguntarse cuántos números tiene el conjunto de todos los números. Este tiene cardinalidad 5, este $\aleph_0$, lo sé, pero ¿qué significa? Nada, no significa nada»;
- el infinito es un proceso (potencial) y no un objeto (actual), y por tanto no se puede operar con el infinito:
  «[…] entender el concepto de infinito, es decir que siempre se va a tener uno más, uno más …»;

«El hecho es que no hay infinito más uno»;
«El doble del infinito no, no se si podría aceptar esta expresión»;

- objetos del mismo tipo, pero de distintas medidas, tienen distintos cardinales:
  «Hay más números en el conjunto de múltiplos de 45 que en el conjunto de los múltiplos de 300, es evidente, aquí hay más vacíos, para encontrar uno se necesita mucho más»;
  «Está bien que el punto no tiene dimensiones, pero si tu dibujas uno, digamos, mil veces, encuentras un segmento así, de tal manera si lo dibujas 1000000 de millón de veces lo tendrías de otra así»;
- confusión clara y difundida entre infinito e ilimitado:
  «Hay más números naturales múltiplos de 45 que puntos en el segmento de longitud 2cm [la pregunta NO fue hecha; el sujeto se pone el problema por sí solo] por que de una y de otra parte el segmento tiene límites»;
- el aplastamiento es un escollo notable:
  «El infinito es uno sólo, porque el infinito es el infinito, es algo que siempre, siempre va ...»;
- …

Naturalmente, de sujeto a sujeto hay variaciones notables.
Pero un aspecto es de extremo interés, la actitud frente a las demostraciones.

5.3. Incidencia de las demostraciones sobre los cambios de convicciones

Como habíamos dicho, a muchos de los sujetos entrevistados, se les propuso las demostraciones recordadas arriba.
Podemos afirmar que, no obstante la declarada comprensión de las demostraciones, muchísimos sujetos, la casi totalidad, no aceptan la demostración como algo que le permita cambiar sus propias convicciones. La mayoría, después de escuchar la demostración, la acoge, evalúa el resultado, pero después recuerda las propias convicciones y declara que:
« […] hasta aquí estaba la demostración y es correcta, pero no sé, esto no me convence por que no puede ser…» [se trata de la demostración que $0,\overline{9} = 1$];
«Sí, lo acepto porque veo la correspondencia biunívoca, pero entonces uno podría, pero no .. sí, veo la función, pero no es, no puede ser…» [se trata de la demostración que los conjuntos de puntos de dos segmentos de distinta longitud pueden ser puestos en correspondencia biunívoca entre ellos];
«[…] Porque no podemos, que por lo menos, que por lo menos hay un irracional de más» [se trata de la demostración del hecho que **n < c**, una demostración que se reveló hostil, casi al límite de la comprensión incluso para profesionales de la matemática; la demostración del hecho que, suponiendo por absurdo que haber hecho en una lista infinita de *todos* los números reales comprendidos entre 0 y 1, se puede construir *otro,* lleva a muchos a afirmar che simplemente hay uno más, pero no reconocen que se encontró una contradicción entre tener *todos* y sin embargo tener *uno más*];
«Sí, los pasajes son simples, demasiado fáciles, demasiado convincentes; pero no sé, si tú metes el segmento ahí y lo trasladas, se ve inmediatamente que no puede ser; y además depende de cómo elijas las coordenadas [se trata de la demostración que hay tantos puntos en un cuadrado como en su lado, otro obstáculo casi insuperable incluso para los profesionales]»;
«La demostración del segmentito y del segmentote la entendí, me convenció, pero si

pienso en la realidad pienso de inmediato que no, la demostración será seguramente justa, pero yo permanezco convencida que no hay infinitos puntos» [aquí hay una confusión notable e interesante; la demostración quería probar que en un segmentito de 2cm hay tantos puntos como en un segmentote de 2m; pero el sujeto recae en la idea física de punto, admitiendo su personal convicción que en el segmento no hay infinitos puntos; sólo de paso, notamos que se trata de un sujeto estudiante en formación para profesora de matemáticas que antes había dado amplias pruebas de competencia matemática];
«Yo vi la demostración y me convenció [está hablando de la demostración de que los conjuntos de puntos de un cuadrado y el conjunto de puntos de uno sólo de sus lados son equipotentes]; yo también uso las demostraciones con mis estudiantes; pero no es la misma cosa; en geometría, una demostración es la demostración de alguna cosa verdadera, que tu sabes que es verdad y que lo demuestras, sabes? Aquí, por el contrario, parece como si manipularas la demostración, haces aquello que te parece pero si yo cambio, eh?, cambio aquello que tomo, después como sé si es verdad; en geometría lo sé primero, pero aquí, ¿cómo hago?, ¿quien me lo dice?».
Naturalmente, hay sujetos (pocos en realidad) que, después de haber manifestado incredulidad sobre un resultado y después de haber visto las demostraciones, admiten cambiar su propia convicción y se comportan de consecuencia. Hay también algunos sujetos (poquísimos en realidad) que demuestran conocer ya los principios del infinito porque han terminado cursos específicos sobre este tema (sea en Italia como en Colombia). Todos admiten haber usado el infinito en varios cursos, de estudiante, pero haber entendido el sentido sólo con cursos específicos.

5.4. Algunas notas al margen

Muchos sujetos pertenecen a diversas categorías.
Por cuanto se intente hacer categorías muy amplias, es difícil que un sujeto se sitúe en una sola de estas; a veces, es más una necesidad del investigador ubicar un sujeto en una categoría en vez de otra, eligiendo aquella más evidente.
A manera de ejemplo, reportamos las frases que de manera sucesiva fueron dichas durante la entrevista clínica, por parte de un sujeto, profesor de matemáticas:
«Digamos que los números naturales son infinitos, pero sabemos que esto no significa nada, porque no se pueden cuantificar [el infinito como indeterminado] […] Es como decir un número tan grande que no se alcanza a decir [el infinito como número grande] […] en el sentido que puede avanzar siempre hacia adelante [el infinito como proceso] […] Decir recta es como no decir nada, no existe, es sólo para decir que es una línea siempre más larga».
A veces, durante la entrevista, los sujetos cambiaron de posición y entraron en contradicción. A veces, migraron a través de interpretaciones distintas, pero no necesariamente contradictorias entre ellas.

Infinito, hechos materiales e inmateriales.
El infinito trae a colación hechos materiales o físicos, sobre todo el universo y el tiempo; o con hechos inmateriales, como el pensamiento humano.

Indiferencia frente a las contradicciones explicitas.
Muchos son los sujetos que, entrando en contradicción entre dos posiciones o entre dos

afirmaciones, se les advirtió de esto; el entrevistador muestra la contradicción explícita y le pide al sujeto entrevistado resolverla. Esto casi nunca sucede y, si un sujeto es obligado a elegir entre dos afirmaciones, una ingenua, debida a imágenes o modelos intuitivos, pobres, adquiridos desde pequeño o debidos a sensaciones poco científicas, y una científica, adquirida gracias a estudio o durante el curso de la entrevista, entonces casi siempre el sujeto elige la primera y olvida la segunda.

Infinito y divinidad.
Algunos sujetos, al sentirse obligados a hablar del infinito, lo relacionan con Dios, con la divinidad, o con el poder divino.

6. Respuestas a las preguntas propuestas en 2

Con base en los resultados de la investigación presentados en **5.**, estamos ahora en la posibilidad de responder a las preguntas propuestas en **2.**; distinguiremos las respuestas en dos parágrafos.

6.1. Relativo a D1

En el sentido común, no parece haber diferencia entre “grandísimo” (en sus varias manifestaciones semánticas) e infinito. La gran mayoría de los entrevistados parece reservar al término infinito un sentido del todo parecido al de grande, enorme, vastísimo etc.
Estudiantes o adultos no específicamente cultos en matemáticas, tienden a confundir “infinito” con “indefinido”, en el sentido que una cosa que no puede ser aferrada, ó con “demasiado grande”.
El “sentido del infinito” que ellos alcanzan a expresar se confunde con el de indeterminado, ilimitado, sin frontera, enorme; no existe un verdadero y propio “sentido del infinito” y esto parece ser causado sólo por ignorancia específica en matemáticas. Una confirmación de esto, es la prueba irrefutable de que este “sentido” no resulta a veces en lo más mínimo influenciado por la cultura matemática adquirida en los estudios, incluso de discreto o alto nivel.
Comprobamos que estudiantes o adultos incluso cultos, no alcanzan o encuentran mucha dificultad al distinguir entre “infinito” (entendido como cardinalidad), “ilimitado”, extensión infinita, sucesión infinita. Por tanto, el sentido que ellos dan al infinito parece ser vago y nebuloso. El “sentido del infinito”, relativo a la cardinalidad escapa a la mayoría.
En el caso de la extensión, no existen relevantes diferencias de aceptación, entre el caso de una dimensión (línea), de dos (superficie), de tres (sólido). El “sentido del infinito” que estas preguntas ponen en evidencia revela una gran confusión entre conceptos completamente diversos; pocos alcanzan a entender el sentido de la eventual diferencia de la infinidad de puntos de un segmento, de un cuadrado, de un cubo; y, quien lo alcanza, o cae en el aplastamiento o entra en contradicción. Resulta así imposible saber, basándonos únicamente en los elementos proporcionados por nuestra investigación, si un tal “sentido del infinito” existe, entre personas de cultura matemática no particularmente elevada. Sin embargo, personas de elevada cultura matemática parecen ser por lo menos más propensas a realizar “estimaciones” y a recurrir a demostraciones.

Resulta clarísimo que el infinito se ve más como un proceso que no como un objeto, un modo de hacer y de decir, más que algo sobre el cual operar; esto implica que resulte poco natural realizar "estimaciones" sobre el infinito y el "sentido del infinito" se confunde, por tanto, con las acciones que este [infinito] permite realizar (sucesiones, extensiones,…) que el individuo controla sin necesidad de poner en acción un "sentido del infinito" específico.
Durante las entrevistas se encontraron propuestas que van desde un punto de vista físico o natural hasta referencias espontáneas al universo, al espacio y al tiempo, en este orden. Estas referencias pueden interpretarse en términos del "sentido del infinito"; pero entonces este parece ser de bajo nivel cualitativo, si lo pensamos desde el punto de vista de la matemática; además se trata sólo de expresiones preconstituidas, de poco significado, no de verdaderas y propias conquistas científicas culturales; parece que las referencias más espontáneas a éste término involucran el universo, Dios, hechos ideales, no la matemática. El infinito relativo a la matemática parece reservado con mayor énfasis a expresiones de adquisición cognitiva.
El término "infinito" es mucho más aceptado como adjetivo y casi nunca como sustantivo; de esto depende en parte que el "sentido del infinito" sea una adquisición del infinito como proceso (potencial) y no tanto como objeto (actual), confirmando todo lo afirmado anteriormente.
Casi nunca un sujeto entrevistado demuestra aceptar espontáneamente el uso del término "infinito" y, cuando lo hace, el "sentido" que le atribuye espontáneamente nunca está ligado a una propia estimación sino a imágenes y a modelos ingenuos, derivados del uso que de tal término se hace en el lenguaje coloquial. Ni siquiera la competencia matemática adquirida en la escuela o en los años universitarios modifica este "sentido", dado que los sujetos tienden, en su mayoría, a restituirle acepciones poco científicas y para nada rigurosas. Resulta interesante el hecho que, no obstante, es más, en contraste con un uso matemático escolar o universitario, las imágenes y los modelos que los sujetos de nuestra investigación dan a este término tienden a ser reapropiaciones de sentidos intuitivos o ingenuos. El "sentido del infinito" recae así en interpretaciones de bajo perfil cognitivo.

6.2. Relativo a D2

Hemos visto en **5.2** que afirmar que **n<c** requiere un nivel de competencia casi completamente fuera de la portada incluso por quienes practican la matemática, ya sea como estudiantes de cursos avanzados o como profesores de matemáticas. Hemos visto también que la demostración formal ayuda poco a aceptar diversos niveles del infinito; este hecho pone en conflicto a los sujetos: de una parte la demostración, de otra el sentido común o intuiciones ingenuas o modelos precognitivos; pocas veces la demostración logra modificar convicciones tan arraigadas a este propósito.
En pocos casos cognitivos, como en ésta conquista matemática del infinito, el ser humano debe realizar un esfuerzo tan fuerte: transformar una propia convicción intuitiva en un "sentido del infinito" complejo de construir y casi imposible de transformar en una verdadera y propia competencia tan intuitiva como aquella que la precede.
Podemos afirmar que el "sentido del infinito" se desarrolla lentamente, con la adquisición de competencias muy fuertes, pero que requieren la capacidad de aceptar las demostraciones como algo que puede cambiar una convicción, no como un proceso

matemático de rutina o de confirmación de verdades ya adquiridas por otra vía.
Normalmente el “sentido del infinito” no existe o es fuertemente obstaculizado por la intuición basada en modelos precognitivos.
Con mayor razón no existe, o requiere una cultura verdaderamente notable y específica, un “sentido del infinito” que permita aceptar incluso por intuición los diversos niveles del infinito en los cuales **n** y **c** se presentan (para no hablar de los niveles sucesivos).
Pensamos por tanto que a la comprensión efectiva de la desigualdad **n<c**, se opone ciertamente el obstáculo ligado a la modalidad en que se presenta la demostración, pero más aún, a la naturaleza compleja que subyace a la falta de realización de un “sentido del infinito” y como consecuencia, la carencia de la capacidad intuitiva de “estimación” del infinito. Queda también confirmada la dificultad de gestionar el sutil juego de los cuantificadores que interviene en la demostración y que escapa a casi todos los entrevistados.
Podemos afirmar que incluso los sujetos que demostraron poseer un cierto “sentido del infinito” y una competencia específica con las cardinalidades transfinitas, se resisten a ponerlas en juego para realizar con ellas, de manera espontánea, “estimaciones”, así como lo hacen en el mundo de los números acudiendo al “sentido del número”. Probablemente se podría mostrar que el “sentido del infinito”, con la consecuente capacidad de efectuar “estimaciones” infinitas no está en directa sucesión cognitiva respecto al “sentido del número”, con la consecuente capacidad de efectuar “estimaciones” numéricas finitas. Probablemente entre las dos competencias no existe relación. [Sobre este punto, véase también la siguiente nota final].

6.3. Una nota final

Algunos de los autores de esta investigación nos sometimos a una prueba relativa a “estimaciones” de cardinales transfinitos realizadas intuitivamente (ligadas por lo tanto a un supuesto “sentido del infinito”), sólo para tener un campo de contraste; todos tenemos una competencia específica en este sector no sólo en cuanto matemáticos (vimos que este hecho, por sí solo, no es suficiente), sino, particularmente, en cuanto docentes de los cursos en los cuales explícitamente se tratan estas cuestiones. Efectivamente, por lo que tales pruebas puedan ser consideradas válidas, quien se sometió a las pruebas mostró un altísimo grado de intuición, de capacidad de realizar a ojo “estimaciones” de la cardinalidad de conjuntos transfinitos, incluso sin recurrir a demostraciones preliminares (pero usándolas, como argumentaciones posteriores, de confirmación). Por ejemplo, escogiendo ejemplos de conjuntos infinitos del todo casual, se tiene inmediatamente la intuición si se trata de conjuntos numerables o no; de estos últimos, se intuye de súbito si se trata de conjuntos que tienen la cardinalidad del continuo o mayor. Después de haber dado la respuesta intuitiva, basada en una estimación debida a un personal “sentido del infinito”, el experimentador debía dar la demostración de aquello que había afirmado.
Llegamos a la conclusión, gracias a las pruebas anteriormente presentadas, que un “sentido del infinito” existe, pero que puede ser alcanzado sólo en casos extremadamente específicos.
Sin embargo, muchos de nosotros cometimos errores clamorosos (incluso del 25-30%) al dar la estimación a ojo sobre colecciones finitas. Esto parece ser una confirma del hecho que no existe relación entre el “sentido de número” con la consecuente capacidad de hacer “estimaciones” intuitivas aceptables de cantidades finitas y el “sentido del

infinito” con la consecuente capacidad de hacer “estimaciones” intuitivas de cardinales infinitos. En otras palabras, “sentido del número” y “sentido del infinito” no son capacidades intuitivas personales correlacionadas aunque sí, a primera vista, pueda aparecer la primera como una premisa cognitiva necesaria para la segunda. Estas invaden dos esferas completamente diversas y la relativa capacidad de “estimar” están ligadas a condiciones y disponibilidades muy diversas.

Bibliografía

Arrigo G., D’Amore B. (1992). *Infiniti*. Milano: Angeli.

Arrigo G., D’Amore B. (1999). «Lo veo, pero no lo creo». Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. *Educación matemática* (México DF, México). 11, 1, 5-24.

Arrigo G., D’Amore B. (2002). “Lo vedo ma non ci credo…”, seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica* (Bologna, Italia). 1, 4-57. [Un amplo resumen en idioma español: Arrigo G., D’Amore B. (2004). Otros allazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática*. (México DF, México). 16, 2, 5-20].

D’Amore B. (1996). El infinito: una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas. *Epsilon*. 36, 341-360.

D’Amore B. (1998). Objetos relacionales y registros representativos distintos: dificultades cognitivas y obstáculos. *Uno*. 15, 63-76.

D’Amore B. (2001). *Più che ‘l doppiar de li scacchi s’inmilla*. Bologna: Pitagora.

D’Amore B., Maier H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica. *La matematica e la sua didattica* (Bologna, Italia). 2, 2002, 144-189. [Un amplo resumen en idioma español: D’Amore B., Maier H. (2003). Produccións escritas de los estudiantes sobre argumentos de matemáticas (TEPs). *Epsilon* (Cádiz, Spagna). 18(2), 53, 243-262].

D’Amore B., Martini B. (1999). El “contexto natural”. Influencia de la lengua natural en las respuestas a las pruebas de matemática. *Suma* (Spagna). 30, 1999, 77-87.

Fandiño Pinilla M.I. (ed.) (2001). *Riflessione sulla formazione iniziale degli insegnanti di matematica: una rassegna internazionale*. Bologna: Pitagora.

Hofstadter D.R. (1982). L’insensibilità numerica. Perché l’insensibilità numerica può essere altrettanto pericolosa dell’insensibilità linguistica. *Le Scienze* (Milano, Italia). 168, 102-107.

Pellegrino C. (1999). Stima e senso del numero. In: Jannamorelli B., Strizzi A. (1999). *Allievo, insegnante, sapere: dagli studi teorici alla pratica didattica.* Atti del 4° Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona (Aq), 23-25 aprile 1999. Sulmona: Qualevita ed. 145-147.

Sbaragli S. (2003). Le convinzioni degli insegnanti elementari sull’infinito matematico. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate* (Paderno, Italia). 26A, 2, 155-186. 26A, 5, 573-588.

Sbaragli S. (2004). *Le convinzioni degli insegnanti elementari sull’infinito matematico*. Tesis doctoral. Universidad de Bratislava (Eslovaquia);

http://math.u nipa.it/~grim/tesi_it.htm
Tirosh D. (1990). Inconsistencies in students' mathematical constructs. *Focus of the Learning Problems in Mathematics*. 11, 271-284.
Tsamir P., Tirosh D. (1992). Students' awareness of inconsistent ideas about actual infinity. *Proceedings of the XVII PME*. Durham NH. 90-97.
Villani V. (1991). *Matematica per discipline biomediche*. Milano: Mc Graw Hill.